Sommaire

1 Rappel et vocabulaire des égalités. 2
1.1 Expression littérale. 2
1.2 Equation. 3

2 Opérations avec des égalités. 4
2.1 Somme et égalité 4
2.2 Produit, quotient et égalité 6

3 Tester une équation. 8

4 Résoudre une équation. 9

5 Résoudre un problème avec une équation. 11

6 Rappel et vocabulaire des inégalités. 13

7 Opérations avec des inégalités. 15
7.1 Somme et inégalité 15
7.2 Produit et inégalité 17

Chapitre 1

Rappel et vocabulaire des égalités.

Voici quelques rappels pour permettre la compréhension de cette leçon.

1.1 Expression littérale.

$x + 7$ est une `expression littérale`

Elle est constituée d'une `opération` (ici l'addition), un `nombre` et une `lettre`.

La lettre x est appelée l'`inconnue`, elle peut être remplacée par un nombre.

$5y^2 - 2 \times 4$ est une expression littérale

Elle est constituée d'opérations (soustraction et multiplication), de nombres et une lettre.

y^2 est l'inconnue, la quantité de y^2 est 5 (en effet $5y^2$ c'est aussi $5 \times y^2$).

$10x^2 - 2x + 6$ est une expression littérale

Elle est constituée d'opérations (soustraction et addition), de nombres et une lettre.

x est l'inconnue, x^2 et x sont deux espèces différentes (il n'y a pas deux inconnues ici).

1.2 Equation.

On peut utiliser une expression littérale dans les `membres d'une équation`.

Le terme égalité, englobe les termes équation et égalité (on peut dire qu'une équation est une égalité particulière).

(1) $\underbrace{4x+2}_{\text{membre de gauche}} = \underbrace{5x+1}_{\text{membre de droite}}$ est une équation avec une inconnue x

(2) $\underbrace{y+9}_{\text{membre de gauche}} = \underbrace{x}_{\text{membre de droite}}$ est une équation avec deux inconnues x et y

(3) $\underbrace{4(x+2)(x+1)}_{\text{membre de gauche}} = \underbrace{0}_{\text{membre de droite}}$ est une équation avec une inconnue x

(4) $\underbrace{\frac{7(3x+1)}{7}}_{\text{membre de gauche}} = \underbrace{\frac{6}{9}}_{\text{membre de droite}}$ est une équation avec une inconnue x

(5) $\underbrace{x}_{\text{membre de gauche}} = \underbrace{7}_{\text{membre de droite}}$ est une équation de `base` avec une inconnue x

(6) $\underbrace{x}_{\text{membre de gauche}} = \underbrace{-4}_{\text{membre de droite}}$ est une équation de `base` avec une inconnue x

...

$10 = 9+1$ est une `égalité juste` (ce n'est pas une équation).

$16 = 9$ est une `égalité fausse` (ce n'est pas une équation).

Chapitre 2

Opérations avec des égalités.

2.1 Somme et égalité

On peut ajouter (ou soustraire) un même nombre aux deux membres d'une égalité.
Si $a = b$, alors $a + c = b + c$
Si $a = b$, alors $a - c = b - c$
a, b, et c sont des nombres relatifs.

Exemples :

(1)	3×2	$=$	6	On peut transformer cette égalité, en **ajoutant 4** à gauche et à gauche.
(2)	$3 \times 2 + 4$	$=$	$6 + 4$	

Les lignes (1) et (2) sont équivalentes. Si $3 \times 2 = 6$ alors $3 \times 2 + 4 = 6 + 4$

(1)	3×2	$=$	6	On peut transformer cette égalité, en **enlevant 5** à gauche et à gauche.
(3)	$3 \times 2 - 5$	$=$	$6 - 5$	

Les lignes (1) et (3) sont équivalentes. Si $3 \times 2 = 6$ alors $3 \times 2 - 5 = 6 - 5$

Autres exemples :

(4) $x + 2 = 3$ On peut transformer cette équation, en **ajoutant 7** à gauche et à gauche.

(5) $x + 2 + 7 = 3 + 7$ On peut réduire.

(6) $x + 9 = 10$

Les lignes (4), (5) et (6) sont équivalentes. Si $x + 2 = 3$ alors $x + 9 = 10$

(7) $3x + 1 = 4$ On peut transformer cette équation, en **enlevant 2** à gauche et à gauche.

(8) $3x + 1 - 2 = 4 - 2$ On peut réduire.

(9) $3x - 1 = 2$

Les lignes (7), (8) et (9) sont équivalentes. Si $3x + 1 = 4$ alors $3x - 1 = 2$

2.2 Produit, quotient et égalité

On peut multiplier (ou diviser) par un même nombre les deux membres d'une égalité.
Si $a = b$, alors $a \times c = b \times c$
Si $a = b$, alors $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$
a, b, et c sont des nombres relatifs et c est différent de zéro.

Exemples :

(1) $7 + 2 = 9$ On peut transformer cette égalité, en **multipliant par 3** à gauche et à gauche.

(2) $(7 + 2) \times 3 = 9 \times 3$

Les lignes (1) et (2) sont équivalentes. Si $7 + 2 = 9$ alors $(7 + 2) \times 3 = 9 \times 3$

(3) $7 = 5 + 2$ On peut transformer cette égalité, en **divisant par 3** à gauche et à gauche.

(4) $\frac{7}{3} = \frac{(5+2)}{3}$

Les lignes (3) et (4) sont équivalentes. Si $7 = 5 + 2$ alors $\frac{7}{3} = \frac{(5+2)}{3}$

Autres exemples :

(5)	2	$=$	$3-x$	On peut transformer cette équation, en **multipliant par 10** à gauche et à gauche.
(6)	2×10	$=$	$(3-x)\times 10$	On peut réduire.
(7)	20	$=$	$(3-x)\times 10$	

Les lignes (5), (6) et (7) sont équivalentes. Si $2=3-x$ alors $20=(3-x)\times 10$

(7)	$x+3$	$=$	$2-x$	On peut transformer cette équation, en **divisant par 2** à gauche et à gauche.
(8)	$\dfrac{(x+3)}{2}$	$=$	$\dfrac{(2-x)}{2}$	

Les lignes (7) et (8) sont équivalentes. Si $x+3=2-x$ alors $\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{2-x}{2}$

Chapitre 3

Tester une équation.

Tester une équation, c'est remplacer l'inconnue par un nombre pour pour voir si l'égalité obtenue est une égalité juste ou fausse.

On cherche à tester l'équation $2x - 5 = x + 8$ pour $x = -2$ et pour $x = 13$.

Si $\underbrace{x = -2 \quad \text{alors} \quad 2 \times (-2) - 5 = -2 + 8}_{\text{on remplace } x \text{ par -2 dans l'équation}}$ $\underbrace{\text{ce qui donne} \quad 2 \times -9 = 6}_{\text{on obtient une égalité fausse.}}$

Donc -2 n'est pas une solution de l'équation $2x - 5 = x + 8$.

Si $\underbrace{x = 13 \quad \text{alors} \quad 2 \times 13 - 5 = 13 + 8}_{\text{on remplace } x \text{ par 13 dans l'équation}}$ $\underbrace{\text{ce qui donne} \quad 21 = 21}_{\text{on obtient une égalité juste.}}$

Donc 13 est une solution de l'équation $2x - 5 = x + 8$.

⚠ Cette méthode ne permet pas de savoir le nombre de solution d'une équation.

Elle n'est pas faite pour trouver une solution d'équation mais pour tester une valeur donnée.

Chapitre 4

Résoudre une équation.

Résoudre une équation, c'est trouver toutes les valeurs de l'inconnue qui transforment l'équation en une égalité juste.

Pour cela on utilise les opérations sur les égalités pour transformer l'équation en une équation de base.

Par exemple, on souhaite résoudre l'équation $2x - 5 = x + 8$.

(1)	$2x - 5$	$=$	$x + 8$	on isole les x à gauche, en enlevant x
(2)	$2x - 5 - x$	$=$	$x + 8 - x$	on réduit
(3)	$x - 5$	$=$	8	on isole les nombres à droite, en ajoutant 5
(4)	$x - 5 + 5$	$=$	$8 + 5$	on réduit
(5)	x	$=$	13	on obtient une équation de base

Les équations des lignes (1), (2), (3), (4) et (5) sont équivalentes, c'est à dire qu'elles ont toutes la même solution.

L'équation (5) étant la plus simple et il est facile de trouver sa solution, c'est la valeur de l'inconnue qui transforme cette équation en une égalité juste (Ici cette valeur est 13, car si $x = 13$ alors la ligne (5) devient $13 = 13$, qui est une égalité juste).

Donc la solution de l'équation (1) est 13, elle est unique.

Autre exemple, on souhaite résoudre l'équation $6x - 1 = 2x + 6$.

(1)	$6x - 1$	$=$	$2x + 6$	on isole les x à gauche, en enlevant $2x$
(2)	$6x - 1 - 2x$	$=$	$2x + 6 - 2x$	on réduit
(3)	$4x - 1$	$=$	6	on isole les nombres à droite, en ajoutant 1
(4)	$4x - 1 + 1$	$=$	$6 + 1$	on réduit
(5)	$4x$	$=$	7	on isole x seul à gauche, en divisant par 4
(6)	$\dfrac{4x}{4}$	$=$	$\dfrac{7}{4}$	on réduit
(7)	x	$=$	$\dfrac{7}{4}$	on obtient une équation de base

Les équations des lignes (1), (2), (3), (4), (5), (6) et (7) sont équivalentes, c'est à dire qu'elles ont toutes la même solution.

L'équation (7) étant la plus simple et il est facile de trouver sa solution, c'est la valeur de l'inconnue qui transforme cette équation en une égalité juste (Ici cette valeur est $\frac{7}{4}$, car si $x = \frac{7}{4}$ alors la ligne (7) devient $\frac{7}{4} = \frac{7}{4}$, qui est une égalité juste).

Donc la solution de l'équation (1) est $\frac{7}{4}$, elle est unique.

Chapitre 5

Résoudre un problème avec une équation.

Dans certain cas, il est plus facile d'utiliser une équation pour résoudre un problème.

Il faut mettre en équation le problème, c'est à dire traduire son énoncé par une équation.

Exemple d'énoncé : Alia et Bastien vendent des fleurs, et comptent l'argent qu'ils ont gagné.

Alia a gagné 15 €en pièces et le reste uniquement en billets de 10 €.

Bastien a gagné 75 €en pièces et le reste uniquement en billets de 5 €.

Ils constatent qu'ils ont gangné la même somme chacun, et qu'ils ont le même nombre de billets.

Combien Alia a-t-elle de billets de 10 € ?

Soit x le nombre de billets de 10 €d'Alia	on définit l'inconnue.
Le nombre de billets de 5 €de Bastien est x	on traduit l'énoncé.
La somme gagnée par Alia est $x \times 10 + 15$	"Alia a gagné ... de 10 €"
La somme gagnée par Bastien est $x \times 5 + 75$	"Bastien a gagné ... de 5 €"
$x \times 10 + 15 = x \times 5 + 75$	"Ils constatent ... la même somme"

Il faut maintenant résoudre cette équation.

$10x + 15 = 5x + 75$	On isole les x a gauche, en enlevant $5x$.
$10x + 15 - 5x = 5x + 75 - 5x$	On isole les x a gauche, en enlevant $5x$.
$5x + 15 = 75$	On réduit.
$5x + 15 - 15 = 75 - 15$	On isole les nombres à droite, en enlevant 15.
$5x = 60$	On réduit.
$\frac{5x}{5} = \frac{60}{5}$	On isole x, en divisant par 5.
$x = 12$	On réduit.

La solution de cette équation est 12.

Comme x représente le nombre de billets d'Alia, alors Alia a donc 12 billets de 10 €

Chapitre 6

Rappel et vocabulaire des inégalités.

Une inégalité est une expression dans laquelle il y a un signe d'ordre ($>$ ou $<$ ou $\geqslant$ ou $\leqslant$) .

Par exemple,

$$\underbrace{4}_{\text{membre de gauche}} > \underbrace{1}_{\text{membre de droite}} \quad \text{est une inégalité juste} \tag{1}$$

$$\underbrace{9}_{\text{membre de gauche}} < \underbrace{11-1x}_{\text{membre de droite}} \quad \text{est une inégalité juste} \tag{2}$$

$$\underbrace{4}_{\text{membre de gauche}} \geqslant \underbrace{0}_{\text{membre de droite}} \quad \text{est une inégalité juste} \tag{3}$$

$$\underbrace{7+1}_{\text{membre de gauche}} \leqslant \underbrace{8}_{\text{membre de droite}} \quad \text{est une inégalité juste} \tag{4}$$

$$\underbrace{7+1}_{\text{membre de gauche}} < \underbrace{8}_{\text{membre de droite}} \quad \text{est une inégalité fausse} \tag{5}$$

$$\underbrace{5-7}_{\text{membre de gauche}} \leqslant \underbrace{-4}_{\text{membre de droite}} \quad \text{est une inégalité fausse} \tag{6}$$

$$\underbrace{x+2}_{\text{membre de gauche}} > \underbrace{5}_{\text{membre de droite}} \quad \text{est une inéquation à une inconnue} \tag{7}$$

$$\underbrace{1+x}_{\text{membre de gauche}} \leqslant \underbrace{x+2}_{\text{membre de droite}} \quad \text{est une inéquation à une inconnue} \tag{8}$$

$$\underset{\text{membre de gauche}}{0} \leqslant \underset{\text{membre de droite}}{x} \quad \text{est une inéquation à une inconnue} \tag{9}$$

$$\underset{\text{membre de gauche}}{x} > \underset{\text{membre de droite}}{0} \quad \text{est une inéquation à une inconnue} \tag{10}$$

$$\underset{\text{membre de gauche}}{x} < \underset{\text{membre de droite}}{-5} \quad \text{est une inéquation à une inconnue} \tag{10}$$

$$\underset{\text{membre de gauche}}{x} > \underset{\text{membre de droite}}{5} \quad \text{est une inéquation à une inconnue} \tag{11}$$

$$\underset{\text{membre de gauche}}{1} \leqslant \underset{\text{membre de droite}}{x} \quad \text{est une inéquation à une inconnue} \tag{12}$$

$0 \leqslant x$ se lit "x est supérieur ou égal à zéro" ou "x est positif"
Cette inéquation est équivalente à $x \geqslant 0$

$x > 0$ se lit "x est strictement supérieur ou égal à zéro" ou "x est strictement positif"
Cette inéquation est équivalente à $0 < x$

Le terme inégalité, englobe les termes inéquation et inégalité (on peut dire qu'une inéquation est une inégalité particulière).

Chapitre 7

Opérations avec des inégalités.

7.1 Somme et inégalité

On peut ajouter (ou soustraire) un nombre aux deux membres d'un inégalité.
Si $a > b$, alors $a+c > b+c$
Si $a > b$, alors $a-c > b-c$
a, b, et c sont des nombres relatifs.

Exemples :

$$\begin{array}{ccc} 10 & > & -4 \\ 10+4 & > & -4+4 \\ 14 & > & 0 \end{array}$$

On peut transformer cette inégalité, en **ajoutant 4** à gauche et à droite.
On réduit.

$$\begin{array}{ccc} 0 & < & 3 \\ 0-1 & < & 3-1 \\ -1 & > & 2 \end{array}$$

On peut transformer cette inégalité, en **enlevant 1** à gauche et à droite.
On réduit.

Autres exemples avec des inéquations :

(1)	$3x$	$\geqslant$	5	On peut transformer cette inéquation, en **ajoutant 2** à gauche et à droite.
(2)	$3x+2$	$\geqslant$	$5+2$	On réduit.
(3)	$3x+2$	$\geqslant$	7	

Les lignes (1), (2) et (3) sont équivalentes. Si $3x \geqslant 5$ alors $3x+2 \geqslant 7$

(5)	$5x-1$	$\leqslant$	$x-2$	On peut transformer cette inéquation, en **enlevant 3** à gauche et à droite.
(6)	$5x-1-3$	$\leqslant$	$x-2-3$	On réduit.
(7)	$5x-4$	$\leqslant$	$x-5$	

Les lignes (5), (6) et (7) sont équivalentes. Si $5x-1 \leqslant x-2$ alors $5x-4 \leqslant x-5$

7.2 Produit et inégalité

On peut multiplier (ou diviser) par un même nombre positif les deux membres d'une inégalité sans changer le signe d'ordre.

Si $a > b$ et $c > 0$, alors $a \times c > b \times c$

Si $a > b$ et $c > 0$, alors $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$

a, b, et c sont des nombres relatifs (et c strictement positif).

Exemples :

$$\begin{array}{rcl} 5 & \geqslant & 4 \\ 5\times 2 & \geqslant & 4\times 2 \\ 10 & \geqslant & 8 \end{array}$$

On peut transformer cette inégalité, en **multipliant par 2** à gauche et à droite.
On réduit.

$$\begin{array}{rcl} 1 & < & 5 \\ \frac{1}{5} & < & \frac{5}{5} \\ \frac{1}{5} & < & 1 \end{array}$$

On peut transformer cette inégalité, en **divisant par 5** à gauche et à droite.
On réduit.

Autres exemples avec des inéquations

$$\begin{array}{lrcl} (1) & x & > & 3 \\ (2) & x\times 2 & > & 3\times 2 \\ (3) & 2x & > & 6 \end{array}$$

On peut transformer cette inégalité, en **multipliant par 2** à gauche et à droite.
On réduit.

Les inéquations (1), (2) et (3) sont équivalentes, c'est à dire que si $x > 3$ alors $2x > 6$

$$\begin{array}{lrcl} (4) & 6x & \geqslant & 12 \\ (5) & \frac{6x}{3} & \geqslant & \frac{12}{3} \\ (6) & 2x & \geqslant & 4 \end{array}$$

On peut transformer cette inégalité, en **divisant par 3** à gauche et à droite.
On réduit.

Les inéquations (4), (5) et (6) sont équivalentes, c'est à dire que si $6x \geqslant 12$ alors $2x \geqslant 4$

On peut multiplier (ou diviser) par un même nombre négatif les deux membres d'une inégalité si on change le signe d'ordre.

Si $a>b$ et $c<0$, alors $a\times c<b\times c$

Si $a>b$ et $c<0$, alors $\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$

a, b, et c sont des nombres relatifs (et c strictement négatif).

Exemples :

$$\begin{array}{ccc} 5 & \geqslant & 4 \\ 5\times(-2) & \leqslant & 4\times(-2) \\ -10 & \leqslant & -8 \end{array}$$

On peut transformer cette inégalité, en **multipliant par -2** à gauche et à droite.

On réduit.

$$1 < 5$$

On peut transformer cette inégalité, en **divisant par -5** à gauche et à droite.

$$\frac{1}{-5} > \frac{5}{-5}$$

On réduit.

$$\frac{-1}{5} > -1$$

Autres exemples avec des inéquations

$$\begin{array}{lccc} (1) & x & > & 3 \\ (2) & x\times(-2) & < & 3\times(-2) \\ (3) & -2x & < & -6 \end{array}$$

On peut transformer cette inégalité, en **multipliant par -2** à gauche et à droite.

On réduit.

Les inéquations (1), (2) et (3) sont équivalentes, c'est à dire que si $x > 3$ alors $-2x < -6$

$$\begin{array}{lccc} (4) & 6x & \geqslant & 12 \\ (5) & \dfrac{6x}{-3} & \leqslant & \dfrac{12}{-3} \\ (6) & -2x & \leqslant & -4 \end{array}$$

On peut transformer cette inégalité, en **divisant par -3** à gauche et à droite.

On réduit.

Les inéquations (4), (5) et (6) sont équivalentes, c'est à dire que si $6x \geqslant 12$ alors $-2x \leqslant -4$